5．関数 $y=ax^2$（1）　《式を求める》

年　　組　名前　　　　　　　　月　日

> 一般に，y が x の関数で $y=ax^2$ と表されるとき，y は x の２乗に比例するという。
> 例　y は x の２乗に比例し，$x=2$ のとき $y=8$ である。y を x の式で表しなさい。
> （解答）y が x の２乗に比例するから，比例定数を a とすると，$y=ax^2$
>
> $x=2$ のとき $y=8$ だから $8=a\times 2^2$
>
> したがって，$a=2$　よって，$y=2x^2$

《A問題》

1．次の問いに答えなさい。

①　y は x の２乗に比例し，$x=3$ のとき $y=-18$ である。y を x の式で表しなさい。

（解答）y が x の２乗に比例するから，比例定数を a とすると，$y=\boxed{ax^2}$ と表せる

$x=3$ のとき $y=-18$ だから

$\boxed{-18}=a\times\boxed{3}^2$

したがって，$a=\boxed{-2}$

よって，$y=\boxed{-2x^2}$

②　y は x の２乗に比例し，$x=-2$ のとき $y=-16$ である。$x=3$ のときの y の値を求めなさい。

（解答）y が x の２乗に比例するから，比例定数を a とすると，$y=\boxed{ax^2}$　と表せる

$x=-2$ のとき $y=-16$ だから

$\boxed{-16}=a\times(\boxed{-2})^2$

したがって，$a=-4$

$y=\boxed{-4x^2}$ に $x=3$ を代入すると

$y=-4\times\boxed{3}^2$

$=\boxed{-36}$

よって，$y=\boxed{-36}$

《B問題》２．次の問いに答えなさい。

①　y は x の２乗に比例し，$x=\dfrac{1}{3}$ のとき $y=-3$ である。y を x の式で表しなさい。

（解答）y が x の２乗に比例するから，比例定数を a とすると，$y=ax^2$ と表せる $x=\dfrac{1}{3}$ のとき

$y=-3$ だから　$-3=a\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^2$ したがって，

$a=-27$　　よって，$y=-27x^2$

②　y は x の２乗に比例し，$x=4$ のとき $y=-4$ である。$x=-\dfrac{1}{2}$ のときの y の値を求めなさい。

（解答）y が x の２乗に比例するから，比例定数を a とすると，$y=ax^2$ と表せる $x=4$ のとき

$y=-4$ だから　$-4=a\times(-4)^2$ したがって，

$a=-\dfrac{1}{4}$　$y=-\dfrac{1}{4}x^2$ に $x=-\dfrac{1}{2}$ を代入すると

$y=-\dfrac{1}{4}\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2=-\dfrac{1}{16}$　よって，$y=-\dfrac{1}{16}$

《チャレンジ問題》

3．底面の半径が x cm，高さが 4cm の円柱の体積を y ㎤とする。このとき，次の各問いに答えなさい。①　y を x の式で表しなさい。

（円柱の体積）＝（底面積）×（高さ）だから，

$y=(x\times x\times\pi)\times 4=4\pi x^2$　　よって，$y=4\pi x^2$

②　底面の半径を 2㎝ のときの体積を求めなさい。

（解答）$y=4\pi x^2$ に $x=2$ を代入すると，

$y=4\pi\times 2^2=16\pi$　　　よって，16π ㎤

③　底面の半径を３倍にしたとき，体積は何倍になりますか。（解答）$x=2\times 3=6$ を代入すると，$y=4\pi\times 6^2=144\pi$　$144\pi\div 16\pi=9$

よって，　９倍

5　関数 $y=ax^2$ （2）

年　組　名前　　　　　　　月　日

《 関数 $y=ax^2$ のグラフ 》

・関数 $y=ax^2$ のグラフは，原点を通り，y 軸について対称な放物線である。

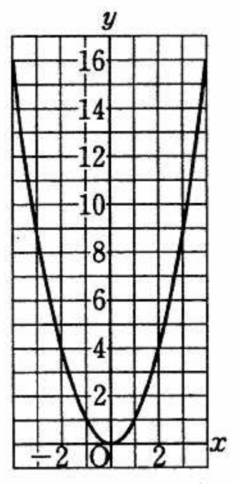
《A問題》

1．関数 $y=x^2$ について，次の表の空欄をうめなさい。

x	･･･	－４	－３	－２	－１	０	
y	･･･	１６	９	４	１	０	

x	１	２	３	４	･･･
y	１	４	９	１６	･･･

2．関数 $y=x^2$ のグラフをかきなさい。



3．関数 $y=x^2$ のグラフについて，次の問いに答えなさい。

①　グラフは，何について対称ですか。

y 軸について対称

②　グラフは，x 軸の上側と下側のどちらにありますか。

上側

③　x ＜０の範囲で x の値が増加するとき，y の値は増加しますか，減少しますか。

減少する

④　x ＞０の範囲で x の値が増加するとき，y の値は増加しますか，減少しますか。

増加する

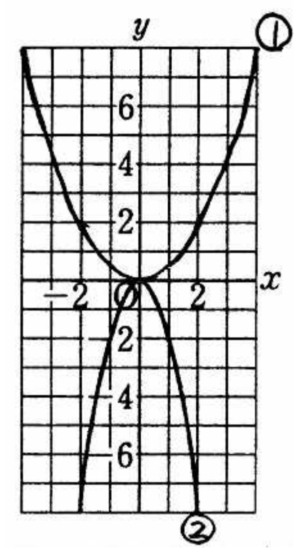
⑤　y の値が最小になるときの x の値をいいなさい。

x ＝０

《B問題》

4．次の関数のグラフをかきなさい。

①　$y=\frac{1}{2}x^2$　　　　②　$y=-2x^2$



《チャレンジ問題》

5．下の㋐～㋕の関数について，次の問いにあてはまるものすべてを答えなさい。

㋐　$y=x^2$　　㋑　$y=-2x^2$　　㋒　$y=3x^2$

㋓　$y=-x^2$　　㋔　$y=2x^2$　　㋕　$y=0.5x^2$

①　グラフが下に開いた放物線になるものはどれですか。

㋑，㋓

②　グラフの開きが最も大きいものはどれですか。

㋕

③　グラフが x 軸について対称になるものはどれとどれですか。

㋐と㋓，㋑と㋔

④　x ＜０の範囲で x の値が増加するとき，y の値も増加するものはどれですか。

㋑，㋓

5　関数　$y=ax^2$　（３）
《 変化の割合 》

・変化の割合＝$\dfrac{y\text{の増加量}}{x\text{の増加量}}$

・関数　$y=ax^2$　では、変化の割合は一定ではない。

《A問題》

1．関数 $y=x^2$　について，x の値が次のように増加するときの変化の割合を，次のように求めた。$\boxed{}$ にあてはまる数をかきなさい。

①　０から２まで

x の増加量は，　２－０＝$\boxed{2}$

y の増加量は，　$2^2-0^2=\boxed{4}$

変化の割合＝$\dfrac{\boxed{4}}{\boxed{2}}=\boxed{2}$

②　２から４まで

x の増加量は，　$\boxed{4}-\boxed{2}=\boxed{2}$

y の増加量は，　$16-\boxed{4}=\boxed{12}$

変化の割合＝$\dfrac{\boxed{12}}{\boxed{2}}=\boxed{6}$

③　４から７まで

x の増加量は，　$\boxed{7}-\boxed{4}=\boxed{3}$

y の増加量は，　$\boxed{49}-\boxed{16}=\boxed{33}$

変化の割合＝$\dfrac{\boxed{33}}{\boxed{3}}=\boxed{11}$

2．次の関数について，x の値が－２から－１まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

①　$y=3x^2$

$$\frac{3\times(-1)^2-3\times(-2)^2}{-1-(-2)}$$
$$=3-12$$
$$=-9$$

②　$y=-4x^2$

$$\frac{-4\times(-1)^2-(-4)\times(-2)^2}{-1-(-2)}$$
$$=-4+16$$
$$=12$$

《B問題》

3．関数 $y=ax^2$　について，x の値が２から５まで増加するときの y の増加量が８４である。a の値を求めなさい。

$$\frac{a\times5^2-a\times2^2}{5-2}=84 \qquad \frac{25a-4a}{3}=84$$

$$\frac{21a}{3}=84 \qquad 7a=84 \qquad a=12$$

年　組　名前　　　　　　　　月　日

4．関数 $y=ax^2$　について，次の場合の a の値を求めなさい。

①　x の値が２から５まで増加するときの変化の割合が７である。

$$\frac{a\times5^2-a\times2^2}{5-2}=7$$
$$\frac{21a}{3}=7$$
$$a=1$$

②　x の値が－５から－１まで増加するときの変化の割合が３である。

$$\frac{a\times(-1)^2-a\times(-5)^2}{-1-(-5)}=3$$
$$\frac{-24a}{4}=3$$
$$a=-\frac{1}{2}$$

5．下の㋐～㋓の関数について，次の問いに答えなさい。

㋐　$y=2x^2$　　　㋑　$y=3x^2$

㋒　$y=\dfrac{1}{2}x^2$　　　㋓　$y=\dfrac{1}{3}x^2$

①　x の値が２から５まで増加するときの変化の割合が最も大きいものはどれですか。

㋑

②　x の値が２から４まで増加するときの変化の割合が最も大きいものはどれですか。　㋑

《チャレンジ問題》

6．２つの関数 $y=x^2$　と $y=6x-1$　について，x の値が a から $a+2$ まで増加するときの変化の割合が等しいとき，a の値を求めなさい。

変化の割合が等しいので　$\dfrac{(a+2)^2-a^2}{(a+2)-a}=6$

$$\frac{a^2+4a+4-a^2}{2}=6$$
$$4a+4=12$$
$$4a=8$$
$$a=2$$

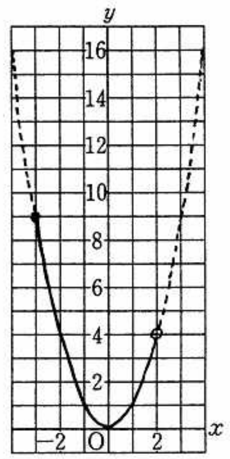
5　関数 $y=ax^2$　（4）
《変　域》

年　組　名前　　　　　　月　日

《A問題》

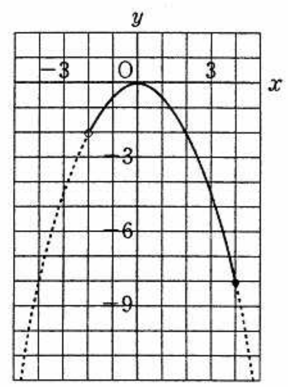
1．次の関数のグラフをかきなさい。また，このときの y の変域を求めなさい。

①　$y=x^2$　（－3≦x＜2）



y の変域　　0≦y≦9

②　$y=-\frac{1}{2}x^2$　（－2＜x≦4）



y の変域　　－8≦y≦0

2．次の関数について，y の変域を求めなさい。

①　$y=3x^2$　（－1≦x≦4）

x＝4のとき　y＝48

0≦y≦48

②　$y=-5x^2$（－2≦x≦3）

x＝3のとき　y＝－45

－45≦y≦0

《B問題》

3．次の関数について，y の変域を求めなさい。

①　$y=-\frac{1}{3}x^2$　（－3≦x＜1）

x＝－3のとき　y＝－3

－3≦y≦0

②　$y=\frac{1}{4}x^2$　（－4＜x≦－2）

x＝－4のとき　y＝4

x＝－2のとき　y＝1

1≦y＜4

4．関数 $y=ax^2$ について，x の変域が－1≦x≦4のとき，y の変域は0≦y≦8である。a の値を求めなさい。

x＝4のとき　y＝8を代入

$8=a\times4^2$

$16a=8$

$a=\frac{1}{2}$

《チャレンジ問題》

5．　x の変域が－6≦x≦4のとき，2つの関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ と $y=\frac{1}{3}x+b$ の y の最小になる値が等しい。b の値を求めなさい。

$y=-\frac{1}{2}x^2$ に x＝－6を代入

$y=-\frac{1}{2}\times(-6)^2$

$y=-18$

$y=\frac{1}{3}x+b$ に x＝－6、y＝－18を代入

$-18=\frac{1}{3}\times(-6)+b$

$-18=-2+b$

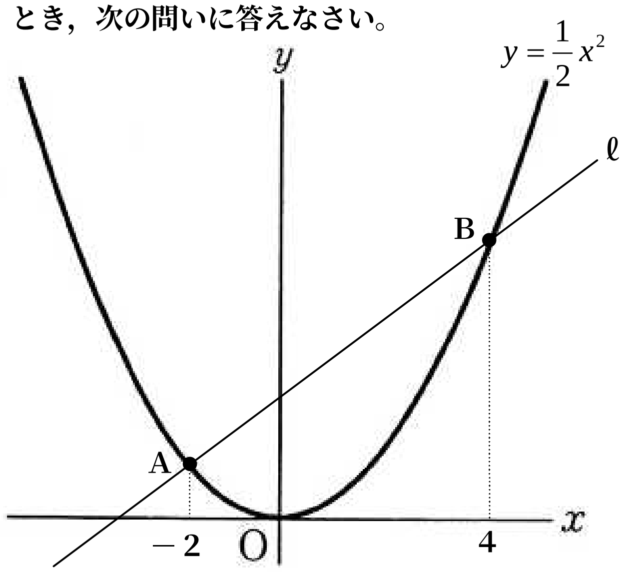
$b=-16$

5　関数ｙ＝ａχ²（５）

《 放物線と直線 》

《A問題》

１．下の図のように，関数 $y=\frac{1}{2}x^2$ のグラフと直線ℓのグラフが２点A，Bで交わっています。
　点Aと点Bのχ座標がそれぞれ－２，４であるとき，次の問いに答えなさい。



①　点Aの座標を求めなさい。

$y=\frac{1}{2}x^2$ に x ＝－２を代入すると

$y=\frac{1}{2}\times(-2)^2=2$

よって，A（－２，２）

②　点Bの座標を求めなさい。

$y=\frac{1}{2}x^2$ に x ＝４を代入すると

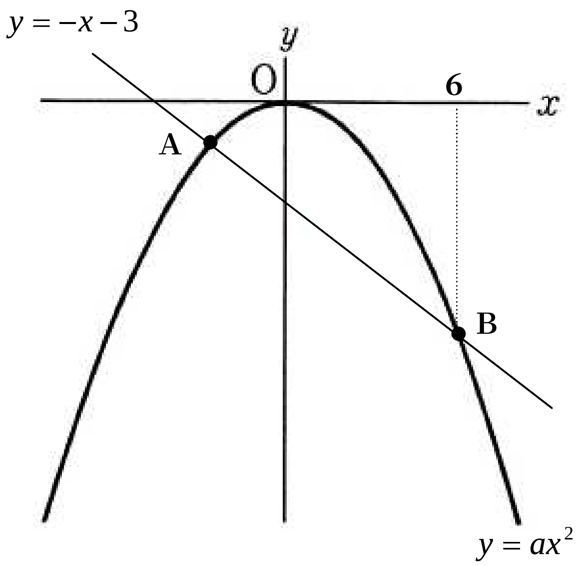
$y=\frac{1}{2}\times 4^2=8$

よって，B（４，８）

③　直線ℓの式を求めなさい。
　直線ℓの式を、$y=ax+b$ とすると，
点A（－２，２）を通ることより
$2=-2a+b$ ・・・（１）
点B（４，８）を通ることより
$8=4a;+b$ ・・・（２）
（１）と（２）の連立方程式を解くと，
$a=1$，$b=4$
よって，求める式は，　$y=x+4$ である。

《B問題》

２．下の図のように，関数 $y=ax^2$ のグラフと関数 $y=-x-3$ のグラフが，２点A，Bで交わっています。交点Bのχ座標が６であるとき，次の問いに答えなさい。



①　点Bの座標を求めなさい。
$y=-x-3$ に $x=6$ を代入すると　$y=-9$
よって，B（６，－９）

②　関数 $y=ax^2$ の比例定数 a の値を求めなさい。

$y=ax^2$ のグラフも点B（６，－９）を通ることから，
－９＝a ×６²
－９＝３６a
よって，$a=-\frac{1}{4}$

③　点Aの座標を求めなさい。

２つの関数 $y=-x-3$，$y=-\frac{1}{4}x^2$ は点Aで，同じ x 座標，y 座標を持つことから、

$$-x-3=-\frac{1}{4}x^2$$

$$\frac{1}{4}x^2-x-3=0$$

$$x^2-4x-12=0$$

$$(x-6)(x+2)=0$$

よって $x=6,-2$

$x=6$は交点Bの方のx座標であるので，
$x=-2$が交点Aのx座標となる。
これより，y座標は、

$y=-\frac{1}{4}x^2$に$x=-2$を代入して，

$$y=-\frac{1}{4}\times(-2)^2$$
$$=－１$$

よって，Ａ（－２，－１）

④　この関数$y=ax^2$において，xの値が２から４まで増加するときの変化の割合を求めなさい。

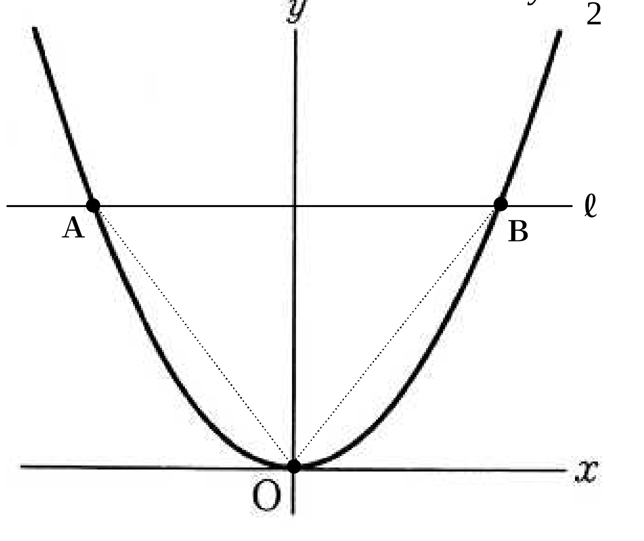
x	２ → ４
y	－１ → －４

$$（変化の割合）=\frac{(-4)-(-1)}{4-2}$$
$$=\frac{-3}{2}$$

変化の割合は，$-\frac{3}{2}$

《チャレンジ問題》

３．下の図のように，関数$y=\frac{1}{2}x^2$のグラフと，x軸に平行な直線ℓがあり，その交点をA，Bとします。また，３点A，O，Bを結び，△AOBを作ります。
　これについて，次の問いに答えなさい。



①　線分ＡＢの長さが１６のとき，次の問いに答えなさい。

（１）　点Ｂの座標を求めなさい。
点Aと点Bはy軸について対称なので，
点Bのχ座標は８となる。
Ｂ（８，３２）

（２）　点Aの座標を求めなさい。
線分ＡＢの長さが１６であるとき，
点Aのχ座標は－８となる。

$y=\frac{1}{2}x^2$に$x=-8$を代入すると，

$y=32$　　Ａ（－８，３２）

（３）　△ＡＯＢの面積を求めなさい。
線分ＡＢを底辺と考えると，

$$△AOB=16\times32\times\frac{1}{2}$$
$$=256$$

②　直線ℓの式が$y=4$のとき，△ＡＯＢの面積を求めなさい。
点A，Bの座標は，

$y=\frac{1}{2}x^2$と$y=4$の交点であることより，

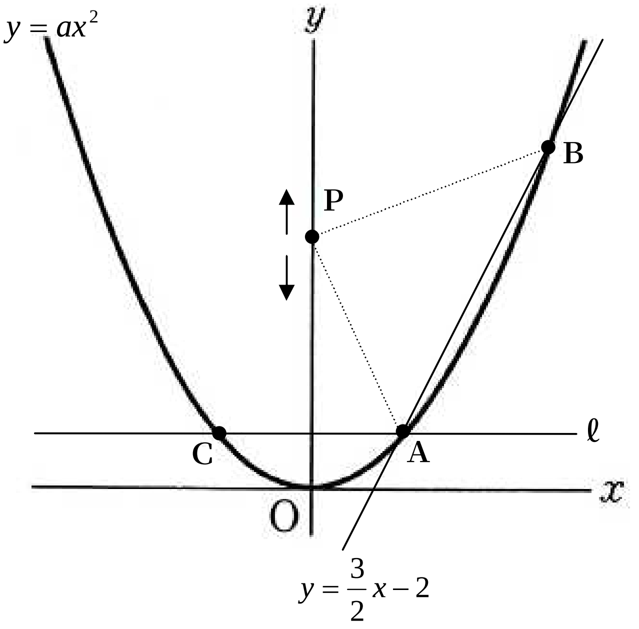
$$\frac{1}{2}x^2=4$$
$$x^2=8$$
$$x=\pm2\sqrt{2}$$

よって，Ａ（$-2\sqrt{2}$，４）Ｂ（$2\sqrt{2}$，４）

$$△AOB=4\sqrt{2}\times4\times\frac{1}{2}$$
$$=8\sqrt{2}$$

4．下の図のように，放物線 $y = ax^2\,(a > 0)$ と、直線 $y = \frac{3}{2}x - 2$ のグラフが２点A，Bで交わっており，点Aの x 座標は２，点Bの x 座標は４である。点Aを通り，x 軸に平行な直線ℓと，放物線との２つの交点のうち，点Aと異なる点をCとする。また，y 軸上を動く点をPとする。

　このとき次の問いに答えなさい。



①　点Aの座標を求めなさい。

$y = \frac{3}{2}x - 2$ に，$x = 2$ を代入すると

$y = 1$　　　A（２，１）

②　点Bの座標を求めなさい。

$y = \frac{3}{2}x - 2$ に $x = 4$ を代入すると，

$y = 4$　　　　B（４，４）

③　放物線 $y = ax^2$ の a の値を求めなさい。

放物線 $y = ax^2$ は点Aを通ることから，

$x = 2, y = 1$ を代入すると，

$1 = 4a$　　　$\therefore\ a = \frac{1}{4}$

④　点Cの座標を求めなさい。

　点Cと点Aは y 軸について対称なので，

点Cの x 座標は－２となる。

C（－２，１）

⑤　２つの線分ＡＰ，ＰＢの長さの和ＡＰ＋ＰＢが最小となるとき，点Ｐの座標を求めなさい。

　点Cと点Aは y 軸について対称なので，

線分ＡＰと線分ＣＰの長さは等しいことがわかる。

ＡＰ＋ＰＢ＝ＣＰ＋ＰＢ

⇩

つまりＡＰ＋ＰＢが最小となるとき，ＣＰ＋ＰＢも最小となる。このとき，３点C，P，Bは一直線上に並ぶので，点Ｐの位置は直線ＢＣ上にあることになる。

直線ＢＣの式は，２点Ｂ（４，４）Ｃ（－２，１）より，

$y = \frac{1}{2}x + 2$

　よって，Ｐ（０，２）である。